Correction du devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur

Les Transformations du plan

Exercice 1 : On considère deux points A et B tels que : $AB = 3cm$.

Et nous considérons la translation $t_{\vec{u}}$ qui transforme respectivement les points : A , B, C et D en A' , B' ; C' et D' et sachant que : $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$

Calculer : $C'D'$.

Solution : On a : $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ et la translation $t_{\vec{u}}$ transforme respectivement les points : A , B, C et D en A' , B' ; C' et D' et puisque : la translation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{C'D'} = -2\overrightarrow{A'B'}$

Donc : $C'D' = 2A'B'$

D'autre part puisque : $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = A'$ et $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = B'$ Alors d'après la propriété caractéristique de la translation on a : $A'B' = AB = 3cm$

Par suite : $C'D' = 2 \times 3cm = 6cm$.

Exercice 2 : Déterminer dans les cas suivants le rapport k de l'homothétie h de centre A qui transforme B en C

1) $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AB}$

Solution: Soit $h(A,k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(B) = C$

$h(B) = C$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

1) $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Équivaut à : $k = \frac{3}{2}$ donc $h\left(A, \frac{3}{2}\right)$

2) $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k = -2$ donc $h(A, -2)$

Exercice 3: Soient A et B deux points fixes du plan .soit T une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$

Montrer que T est une homothétie de centre I le milieu du segment $[AB]$ et déterminer son rapport k

Solution : pour chaque point M du plan nous avons : $T(M) = M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM'} = 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{MI}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'} = 3\overrightarrow{MI} + 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)$ or on a : I le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'} = -3\overrightarrow{IM}$

Cela veut dire que : h est une homothétie de centre I le milieu du segment $[AB]$ et de rapport $k = -3$

Exercice 4 : Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $(AB)\parallel(CD)$ et tels que : $AB=2$ et $CD=4$

1) Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie h qui transforme A en D et transforme B en C.

2) Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie h' qui transforme A en C et transforme B en D

Solution :1) Soit $h(E,k)$: on a : $h(A)=D$

Donc : $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{EA}$

Donc : les points E ; A et D sont alignés

Par suite : $E\in(AD)$

Et on a : $h(B)=C$ donc : $\overrightarrow{EC}=k\overrightarrow{EB}$

Donc : les points E ; B et C sont alignés

Par suite: $E\in(BC)$

Donc le centre de l'homothétie h est le point E d'intersection des droites (AD) et (BC)

Et puisque : $(AB)\parallel(CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle EDC

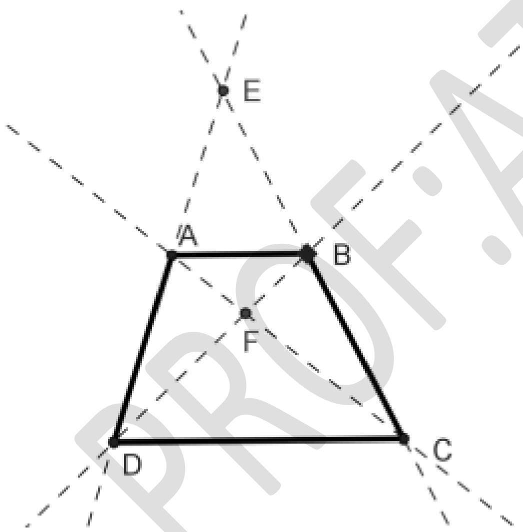
On a : $\frac{ED}{EA}=\frac{EC}{EB}=\frac{DC}{AB}=\frac{4}{2}=2$

Et puisque : $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{EA}$ alors : $\|\overrightarrow{ED}\|=\|k\overrightarrow{EA}\|$

C'est-à-dire : $ED=|k|EA$ donc : $\frac{ED}{EA}=|k|$

Et par suite : $|k|=2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le même sens alors : $k=2$

Par conséquent : $h(E,2)$



2) Soit $h'(F,k')$

On a : $h'(A)=C$ donc : $\overrightarrow{FC}=k'\overrightarrow{FA}$

Donc : les points F ; A et C sont alignés par suite : $F\in(AC)$

Et On a : $h'(B)=D$ donc : $\overrightarrow{FD}=k'\overrightarrow{FB}$

Donc : les points F ; B et D sont alignés par suite: $F\in(BD)$

Donc le centre de l'homothétie h' est le point F d'intersection des droites (AC) et (BD)

Et puisque : $(AB)\parallel(CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle EDC

On a : $\frac{FD}{FA}=\frac{FC}{FB}=\frac{DC}{AB}=\frac{4}{2}=2$

Et puisque : $\overrightarrow{FD}=k'\overrightarrow{FB}$ alors : $\left\|\overrightarrow{FD}\right\|=\left\|k'\overrightarrow{FB}\right\|$

c'est-à-dire : $FD=|k'|FB$ donc : $\frac{FD}{FB}=|k'|$

Et par suite : $|k'|=2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le sens contraire alors : $k'=-2$

Par conséquent : $h'(F,-2)$

Exercice 5: ABC un triangle et D un point tel que : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et I est le point d'intersection des droites (BD) et (AC) (Voir la figure)

On considère l'homothétie h de centre I qui transforme le point A en C.

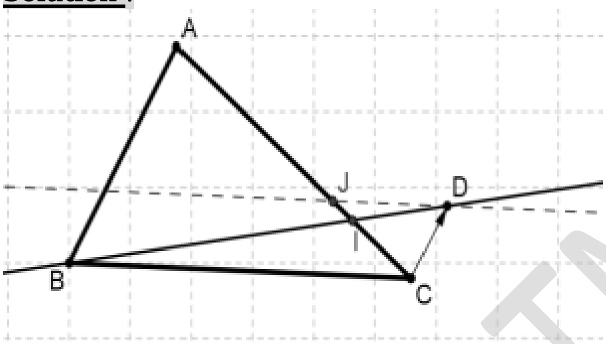
1) a)Déterminer l'image du point B par l'homothétie h

b) En déduire le rapport k de l'homothétie h.

2) La droite qui passe par D et parallèle à (BC) coupe la droite (AI) en J.

Montrer que $h(C)=J$.

Solution :



1)a) On a de I qui transforme le point A en C

Et on a : $h((BI))=(BI)$ car $I\in(BI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(A)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle donc l'image de la droite (AB) est la droite qui passe par l'image de A qui est C et parallèle a (AB)

Donc : $h((AB))=(CD)$

On a : $B\in(BI)\cap(AB)$

Donc : $h(B)\in h((BI))\cap h((AB))$

C'est-à-dire : $h(B)\in(BI)\cap(CD)$

Et puisque : $(BI)\cap(CD)=\{D\}$ alors : $h(B)=D$

b) Déduction du rapport k de l'homothétie h ?

On a $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$

Et puisque : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $k=-\frac{1}{4}$

2) On a : $h((CI))=(CI)$ car $I\in(CI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(B)=D$ donc l'image de la droite (BC) est la droite qui passe par l'image de B qui est D et parallèle a (BC)

Donc : $h((BC))=(DJ)$

On a : $C\in(BC)\cap(CI)$

Donc : $h(C)\in h((BC))\cap h((CI))$

C'est-à-dire : $h(C)\in(DJ)\cap(CI)$

Et puisque : $(DJ)\cap(CI)=\{J\}$ alors : $h(C)=J$